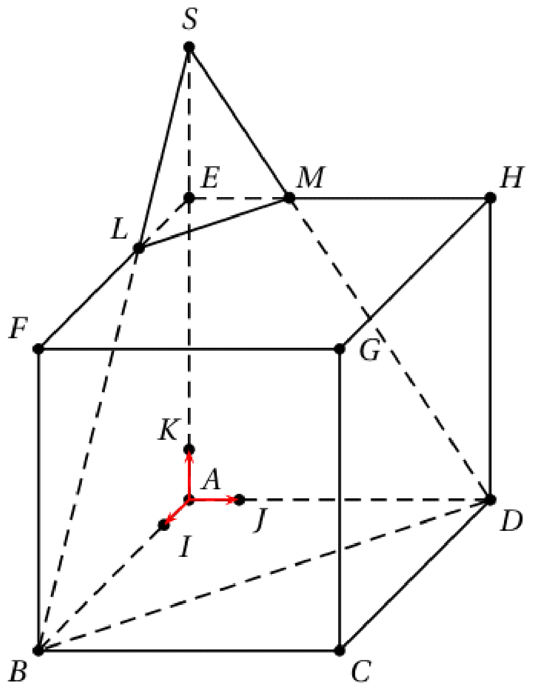
Préparation bac : orthogonalité dans l'espace Thiaude P

Ex 01 Antilles-Guyane Juin 2018 durée $\approx 1h10\ min$

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.

Ces deux solides sont représentés par le cube $ABCDEFGH$ et par le tétraèdre $SELM$ ci-dessous :



On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$ tel que :
$I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH)
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

2. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2\ ;\ 0\ ;\ 6)$.

3. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).
   b. Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0\ ;\ 0\ ;\ 9)$.

4. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
   a. Vérifier que $\vec{n}$ est normal au plan (BDL).
   b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est :
   $$3x + 3y + 2z - 18 = 0$$
   c. On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique :
   $$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \quad (s \in \mathbb{R}) \\ z = 6 \end{cases}$$
   Calculer les coordonnées du point M.

5. Calculer le volume du tétraèdre $SELM$.
   On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$

6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre $55°$ et $60°$. Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

Corrigé

cube de 6 mètres d'arête

Repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$, unité graphique : 1 mètre

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH)
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. **Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.**
   Rappel du théorème des deux plans parallèles
   « Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième, alors les droites d'intersection sont parallèles. »
   Les deux plans (ABD) et (EFH) sont parallèles et ils sont coupés par le plan (BDS) donc les droites d'intersection de (BDS) avec (ABD) et de (BDS) avec (EFH) sont parallèles.
   Or, ces droites sont respectivement (BD) et (LM) donc $(BD) \parallel (LM)$ ou encore $(LM) \parallel (BD)$.

2. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2\ ;\ 0\ ;\ 6)$.

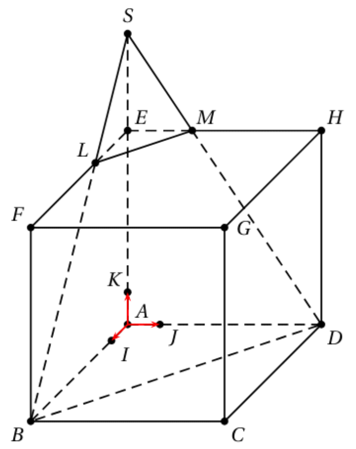
$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FL} = 6\overrightarrow{AI} + 6\overrightarrow{AK} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FE} = 6\overrightarrow{AI} + 6\overrightarrow{AK} + \frac{2}{3}(-6\overrightarrow{AI})$
$= 6\overrightarrow{AI} + 6\overrightarrow{AK} - 4\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AI} + 6\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AI} + 0\overrightarrow{AJ} + 6\overrightarrow{AK}$

On a : $\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AI} + 0\overrightarrow{AJ} + 6\overrightarrow{AK}$ autrement dit $\boldsymbol{L(2\ ;0\ ;6)}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AK})$.

Autre méthode

$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FL} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} - \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$
$= \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EF} = 6\overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}(6\overrightarrow{AI}) = 6\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AI} + 0\overrightarrow{AJ} + 6\overrightarrow{AK}$
etc.

3. Rappel de la figure



a. Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).

On a $B(6;0;0)$ et $L(2\ ;\ 0\ ;\ 6)$, or :

$$\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}x_L - x_B\\ y_L - y_B\\ z_L - z_B\end{pmatrix}$$

donc :

$$\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}2-6\\ 0-0\\ 6-0\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 6\end{pmatrix}$$

$B(6;0;0) \in (BL)$ et $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (BL) donc une représentation paramétrique de (BL) est :

$$\begin{cases}x = 6 - 4t\\ y = 0 + 0t\\ z = 0 + 6t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Finalement : $(\boldsymbol{BL}) : \begin{cases}\boldsymbol{x = 6 - 4t}\\ \boldsymbol{y = 0}\\ \boldsymbol{z = 6t}\end{cases} \quad (\boldsymbol{t} \in \mathbb{R})$

b. Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0\ ;\ 0\ ;\ 9)$.

$S \in (BL)$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases}x_S = 6 - 4t\\ y_S = 0\\ z_S = 6t\end{cases}$$

Or, $S \in (AK)$ donc $x_S = y_S = 0$, d'où $6 - 4t = 0$, i.e. : $t = \frac{3}{2}$.

On alors :

$$z_S = 6\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{18}{2} = 9$$

On a donc bien : $\boldsymbol{S(0;0;9)}$.

4. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 3\ ;\ 2)$.

a. Vérifier que $\vec{n}$ est normal au plan (BDL).

On a : $B(6;0;0)$ et $D(0;6;0)$ donc $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}0-6\\ 6-0\\ 0-0\end{pmatrix}$ i.e. $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\ 6\\ 0\end{pmatrix}$.

On a : $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\ 6\\ 0\end{pmatrix}$.

En utilisant l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormé, on obtient :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD} = (3)(-6) + (3)(6) + (2)(0) = -18 + 18 + 0 = 0$$

On constate que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{BD}$.

De même, $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 6\end{pmatrix}$ donc :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BL} = (3)(-4) + (3)(0) + (2)(6) = -12 + 0 + 12 = 0$$

On constate que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BL} = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{BL}$.

$\vec{n} \neq \vec{0}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BL}$ du plan (BDL) donc **$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BDL)**.

Autre rédaction
$\vec{n} \neq \vec{0}$ est orthogonal aux vecteurs de la base $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BL})$ du plan (BDL) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à ce plan.

b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est :

$$\mathbf{3x + 3y + 2z - 18 = 0}$$

$\vec{n}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (BDL) donc une équation cartésienne de ce plan s'écrit : $3x + 3y + 2z + d = 0$.

Or $B\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} \in (BDL)$ donc $d = -3(6) - 3(0) - 2(0) = -18$.

Une équation cartésienne de (BDL) est bien : $3x + 3y + 2z + (-18) = 0$ c'est-à-dire : $\mathbf{3x + 3y + 2z - 18 = 0}$.

c. On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} \mathbf{x = 0} \\ \mathbf{y = s} \quad (\mathbf{s} \in \mathbb{R}) \\ \mathbf{z = 6} \end{cases}$$

Calculer les coordonnées du point M.

M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH), il s'agit donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \\ 3x + 3y + 2z - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \\ 3(0) + 3(s) + 2(6) - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \\ 3s - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \\ s = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 6 \\ s = 6 \end{cases}$$

donc $\boldsymbol{M}(\mathbf{0}; \mathbf{2}; \mathbf{6})$.

5. **Calculer le volume du tétraèdre $SELM$.**
On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \textbf{Aire de la base} \times \textbf{Hauteur}$$

La base du tétraèdre $SELM$ est le triangle ELM rectangle en E, donc d'aire :

$$\mathcal{A}_{ELM} = \frac{EL \times EM}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

La hauteur de ce tétraèdre, en prenant pour base le triangle ELM, est $SE = 9 - 6 = 3$.

On a donc : $\mathcal{V}_{SELM} = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 2$.

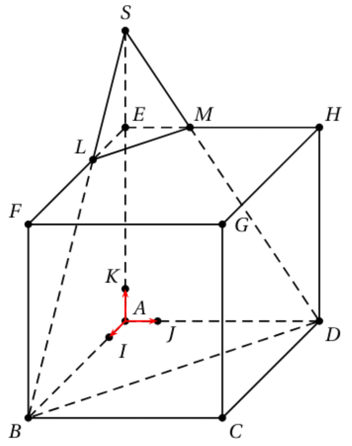
Le tétraèdre a pour volume $2\ m^3$.

6. **L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre $55°$ et $60°$. Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?**
le triangle SLE est rectangle en E donc :

$$\tan \widehat{SLE} = \frac{ES}{EL} = \frac{3}{2}$$

À l'aide de la calculatrice : la mesure de $\widehat{SLE}$ est environ 56,3° donc **la contrainte de l'artiste est respectée**.

Rappel de la figure



Ex 02* **Amérique du Nord Mai 2018 (extrait, d'après) durée ≈ $1h$**
On munit l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A, on considère les points $B(10\,;\,-8\,;\,2)$, $C(-1\,;\,-8\,;\,5)$ et $D(14;\,4;\,8)$.

1. **a. Déterminer un système d'équations paramétriques de (AB) et de (CD).**
   b. Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.
2. **On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.**
   a. Déterminer les coordonnées des points I et J, en déduire la distance IJ.
   b. Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD). La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).

Corrigé
Repère orthonormé d'origine A,
$A(0;0;0)$, $B(10\,;\,-8\,;\,2)$, $C(-1\,;\,-8\,;\,5)$ et $D(14;\,4;\,8)$

1. **a. Déterminer un système d'équations paramétriques de (AB) et de (CD).**

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10-0\\-8-0\\2-0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\-8\\2\end{pmatrix}$$

$A(0\,;0\,;0)\in(AB)$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\-8\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) donc :

$$(AB):\begin{cases}x=0+10k\\y=0-8k\\z=0+2k\end{cases}(k\in\mathbb{R})$$

autrement dit :

$$(AB):\begin{cases}\boldsymbol{x=10k}\\\boldsymbol{y=-8k}\\\boldsymbol{z=2k}\end{cases}(\boldsymbol{k}\in\mathbb{R})$$

De même $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}14+1\\4+8\\8-5\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}15\\12\\3\end{pmatrix}$, puis :

$$(CD):\begin{cases}\boldsymbol{x=-1+15t}\\\boldsymbol{y=-8+12t}\\\boldsymbol{z=5+3t}\end{cases}(\boldsymbol{t}\in\mathbb{R})$$

b. Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.
Cherchons les coordonnées d'un éventuel point commun entre (AB) et (CD).

Question : existe-t-il $(k,t)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{cases}10k=-1+15t\\-8k=-8+12t\\2k=5+3t\end{cases}$?

On a les équivalences :

$$\begin{cases}10k=-1+15t\\-8k=-8+12t\\2k=5+3t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\times2k=-1+15t\\-4\times2k=-8+12t\\2k=5+3t\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}5\times(5+3t)=-1+15t\\-4\times(5+3t)=-8+12t\\2k=5+3t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25+15t=-1+15t\\-20-12t=-8+12t\\2k=5+3t\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}25=-1\ FAUX\\L_2\\L_3\end{cases}$$

Le système est impossible donc les droites (AB) et (CD) n'ont aucun point en commun donc (AB) et (CD) sont soit strictement parallèles, soit non coplanaires, or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\-8\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}15\\12\\3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc (AB) et (CD) ne sont pas parallèles par conséquent **(AB) et (CD) ne sont pas coplanaires**.

2. **$I\in(AB)$, I d'abscisse 5 et $J\in(CD)$, J d'abscisse 4**
   a. Déterminer les coordonnées des points I et J, en déduire la distance IJ.

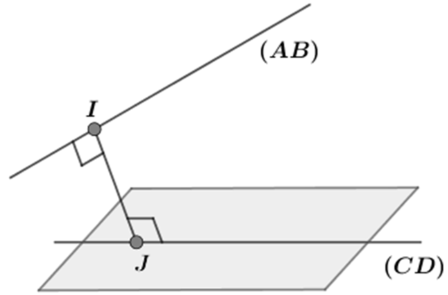
• coordonnées de I
En utilisant le système d'équations paramétriques de (AB) avec $x=5$, on obtient :

$$\begin{cases}5=10k\\y=-8k\\z=2k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\y=-8\left(\frac{1}{2}\right)\\z=2\left(\frac{1}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\y=-4\\z=1\end{cases}$$

donc : $\boldsymbol{I(5;\,-4;1)}$.

• coordonnées de J
En utilisant le système d'équations paramétriques de (CD) avec $x=4$, on obtient :

$$\begin{cases}4=-1+15t\\ y=-8+12t\\ z=5+3t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{1}{3}\\ y=-8+12\left(\dfrac{1}{3}\right)\\ z=5+3\left(\dfrac{1}{3}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{1}{3}\\ y=-8+\dfrac{12}{3}\\ z=5+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=3\\ y=-4\\ z=6\end{cases}$$



donc : $\boldsymbol{J(4;-4;6)}$.

• **distance IJ**

La formule de la distance dans un repère orthonormé s'écrit :

$$IJ=\sqrt{(x_J-x_I)^2+(y_J-y_I)^2+(z_J-z_I)^2}$$

Or, $I(5;\ -4;1)$ et $J(4;-4;6)$ donc :

$$IJ=\sqrt{(4-5)^2\ +(-4-(-4))^2\ +(6-1)^2}$$
$$IJ=\sqrt{(-1)^2+0^2+5^2}$$
$$\boldsymbol{IJ=\sqrt{26}}$$

b. Démontrer que (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).

$I(5;\ -4;1)$ et $J(4;-4;6)$ donc $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}4-5\\-4+4\\6-1\end{pmatrix}$, i.e. $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$.

Rappelons que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\-8\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}15\\12\\3\end{pmatrix}$.

En utilisant l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormé on obtient :

$$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB}=(-1)(10)+(0)(-8)+(5)(2)=-10+0+10=0$$

On a : $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ donc $\overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{AB}$ autrement dit : $\boldsymbol{(IJ)\perp(AB)}$.

De même :

$$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{CD}=(-1)(15)+(0)(12)+(5)(3)=-15+0+15=0$$

On a : $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ donc $\overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{CD}$ autrement dit : $\boldsymbol{(IJ)\perp(CD)}$.

Ex 03** **d'après Pondichéry Mai 2018 durée** $\approx 1h20min$

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ **d'unité 1 cm,**
on considère $A(2;\ 1;\ 4)$, $B(4\ ;\ -1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 3\ ;\ 2)$ **et** $D(4\ ;\ 3\ ;\ -2)$.

1. **Déterminer une représentation paramétrique de la droite** (CD).
2. **Déterminer les coordonnées du point** $H \in (CD)$ **où** H **est le projeté orthogonal de** B **sur** (CD) **puis montrer que l'aire du triangle** BCD **est égale à 12** cm^2.
3. **Étude d'une intersection**
   a. **Démontrer que** $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ **est un vecteur normal au plan** (BCD).
   b. **Déterminer une équation cartésienne du plan** (BCD).
   c. **Déterminer une représentation paramétrique de la droite** Δ **passant par** A **et orthogonale au plan** (BCD).
   d. **Démontrer que** $I\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$ **est le point d'intersection de la droite** Δ **et du plan** (BCD).
4. **Calculer le volume du tétraèdre** $ABCD$.

Corrigé

Repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ **d'unité 1 cm**
$A(2;\ 1;\ 4)$, $B(4\ ;\ -1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 3\ ;\ 2)$ **et** $D(4\ ;\ 3\ ;\ -2)$

1. **Déterminer une représentation paramétrique de la droite** (CD).

On a : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D-x_C\\y_D-y_C\\z_D-z_C\end{pmatrix}$ donc : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4-0\\3-3\\-2-2\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$.

$C(0\ ;\ 3\ ;\ 2) \in (CD)$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD) donc :

$$(CD) : \begin{cases}x = 0 + 4k\\ y = 3 + 0k\\ z = 2 - 4k\end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Une **représentation paramétrique de** (CD) **est :** $\begin{cases}\boldsymbol{x = 4k}\\ \boldsymbol{y = 3}\\ \boldsymbol{z = 2 - 4k}\end{cases}$ $(\boldsymbol{k} \in \mathbb{R})$.

2. • **coordonnées du point** H **projeté orthogonal de** B **sur** (CD)

Par définition du projeté orthogonal sur une droite, on a :
$H \in (CD)$ et $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CD}$, c'est-à-dire $H \in (CD)$ et $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$.

$H(x_H;y_H;z_H) \in (CD)$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases}x_H = 4k\\ y_H = 3\\ z_H = 2-4k\end{cases}$

Or, $B(4\ ;\ -1\ ;\ 0)$ donc $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}4k-4\\3+1\\2-4k-0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}4k-4\\4\\2-4k\end{pmatrix}$

D'autre part on a vu que : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$.

En utilisant $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ et l'écriture du produit scalaire dans un repère orthonormé, on obtient :

$$(4k-4)(4) + (4)(0) + (2-4k)(-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 16k - 16 + 0 - 8 + 16k = 0 \Leftrightarrow 32k - 24 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{24}{32} \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$$

On a donc :

$$\begin{cases}x_H = 4\times\frac{3}{4}\\ y_H = 3\\ z_H = 2 - 4\times\frac{3}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_H = 3\\ y_H = 3\\ z_H = -1\end{cases}$$

Finalement : $\boldsymbol{H(3;3;-1)}$.

• **aire du triangle** BCD

$(BH) \perp (CD)$ et $H \in (CD)$ donc

$$\mathcal{A}_{BCD} = \frac{1}{2}\times CD \times BH$$

Or,

$$CD = \|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{4^2+0^2+(-4)^2} = \sqrt{16+0+16} = \sqrt{16\times 2} = 4\sqrt{2}$$

$$BH = \sqrt{(x_H-x_B)^2+(y_H-y_C)^2+(z_H-z_C)^2}$$
$$= \sqrt{(3-4)^2+(3+1)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$$
$$= \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$$

donc :

$$\mathcal{A}_{BCD} = \frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 3\sqrt{2} = 2\times 3\times\left(\sqrt{2}\right)^2 = 6\times 2 = 12$$

Le triangle BCD **a bien pour aire 12** cm^2.

3. Étude d'une intersection

a. Démontrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

On a vu que $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ et on a : $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}4-0\\-1-3\\0-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}4\\-4\\-2\end{pmatrix}$.

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD} = (2)(4)+(1)(0)+2(-4) = 8+0-8 = 0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{CD}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB} = (2)(4)+(1)(-4)+(2)(-2) = 8-4-4 = 0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{CB}$

$\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteur de la base $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB})$ du plan (BCD) donc : $\boldsymbol{\vec{n}\perp(BCD)}$.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD) et $B(4\,;\,-1\,;\,0)\in(BCD)$

donc une équation du plan (BCD) s'écrit : $2x+y+2z+d=0$

avec $d = -2x_B+1y_B+2z_B = -2(4)-1(-1)-2(0) = -8+1 = -7$

Une équation du plan (BCD) est : $2x+y+2z-7=0$.

<u>Autre méthode</u>

$M(x;y,z)\in(BCD) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}=0$

Or : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-4\\y+1\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ donc en utilisant l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormé on obtient :

$(x-4)(2)+(y+1)(1)+(z)(2)=0 \Leftrightarrow 2x-8+y+1+2z=0$

$\Leftrightarrow 2x+y+2z-7=0$

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

$\Delta\perp(BCD)$ donc tout vecteur normal au plan (BCD) est un vecteur directeur de Δ, en particulier $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, et comme de plus $A(2;\ 1;\ 4)\in\Delta$ on en déduit qu'une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases}x=2+2t\\y=1+1t\\z=4+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases}\boldsymbol{x=2+2t}\\\boldsymbol{y=1+t}\\\boldsymbol{z=4+2t}\end{cases}(\boldsymbol{t}\in\mathbb{R})$$

d. Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Il s'agit de vérifier que $I\in\Delta$ et $I\in\mathcal{P}$.

• **Montrons que $I\in\Delta$**

Question : existe-t-il $t\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases}x_I=2+2t\\y_I=1+t\\zI=4+2t\end{cases}$?

$$\begin{cases}\frac{2}{3}=2+2t\\\frac{1}{3}=1+t\\\frac{8}{3}=4+2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{\frac{2}{3}-2}{2}\\t=\frac{1}{3}-1\\t=\frac{\frac{8}{3}-4}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{\frac{2}{3}-\frac{6}{3}}{2}\\t=\frac{1}{3}-\frac{3}{3}\\t=\frac{\frac{8}{3}-\frac{12}{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\frac{2}{3}\\t=-\frac{2}{3}\\t=-\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow t=-\frac{2}{3}$$

Il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases}x_I=2+2t\\y_I=1+1t\\zI=4+2t\end{cases}$ à savoir $t=-\frac{2}{3}$ donc $I\in\Delta$.

• **Montrons que $I\in\mathcal{P}$**

Une équation de $\mathcal{P}$ est $2x+y+2z-7=0$. Or, on a :

$$2x_I+y_I+2z_I-7 = 2\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+2\times\frac{8}{3}-7 = \frac{4}{3}+\frac{1}{3}+\frac{16}{3}-\frac{21}{3}=0$$

On constate que $2x_I+y_I+2z_I-7=0$ donc $I\in\mathcal{P}$

• **Conclusion** :

On a montré que $\Delta\perp\mathcal{P}$ donc Δ et $\mathcal{P}$ sont sécant (c'est une implication, non une équivalence) par conséquent ils ont un et un seul point en commun.

Or, $I\in\Delta$ et $I\in\mathcal{P}$ donc **I est le point d'intersection de Δ et $\mathcal{P}$.**

4. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Le volume du tétraèdre $ABCD$ est : $\mathcal{V}_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\mathcal{A}_{BCD}\times AI$

Or on a montré à la question **2.** que $\mathcal{A}_{BCD}=12\ cm^2$ et on a :

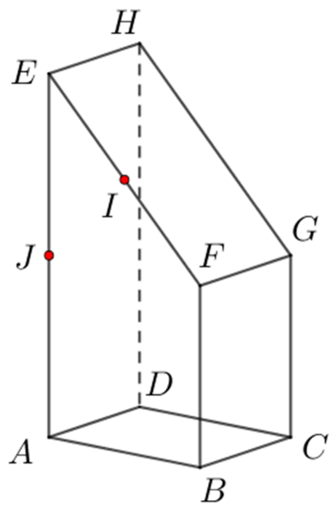
$$AI=\sqrt{(x_I-x_A)^2+(y_I-y_A)^2+(z_I-z_A)^2}=\cdots(N.R)=2$$

$$\mathcal{V}_{ABCD}=\frac{1}{3}\times12\times2=\boldsymbol{8\ cm^3}$$

Ex 04 **Sujet 0 Janvier 2024 Exercice 4** $\approx 30h$

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Les questions sont indépendantes.

On considère le prisme droit $ABFEDCGH$ tel que $AB = AD$. Sa base $ABFE$ est un trapèze rectangle en A, vérifiant $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
On note I le milieu du segment $[EF]$. On note J le milieu du segment $[AE]$.
On associe à ce prisme le repère orthonormé $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ tel que $\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}, \vec{\jmath} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AJ}$.



1. On donne les coordonnées de quatre vecteurs dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Lequel est un vecteur normal au plan (ABG) ?
a. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ **d.** $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

2. Parmi les droites suivantes, laquelle est parallèle à la droite (IJ) ?
a. (DG) **b.** (BD) **c.** (AG) **d.** (FG)

3. Quels vecteurs forment une base de l'espace ?
a. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CG})$ **b.** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ **c.** $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DG})$ **d.** $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CE})$

4. Une décomposition du vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme somme de plusieurs vecteurs deux à deux orthogonaux est :
a. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG}$ **b.** $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AJ}$
c. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JG}$ **d.** $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG}$

5. Le volume du prisme droit $ABFEDCGH$, est égal à :
a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{8}{5}$ **c.** $\frac{3}{2}$ **d.** 2

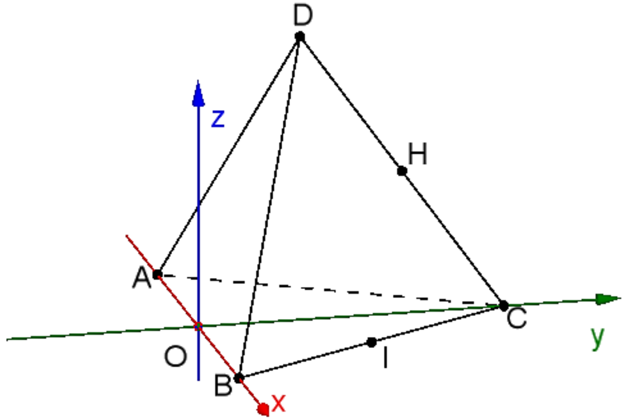
Corrigé
https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_Exercices_0_2024_FH4.pdf

Ex 05* **Asie Juin 2018 durée ≈ $1h$**

On se place dans un repère orthonormé d'origine O et d'axes (Ox), (Oy) et (Oz).

Dans ce repère, on donne les points $A(-3\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ 0)$, $C(0; 3\sqrt{3}; 0)$ et $D(0; \sqrt{3}; 2\sqrt{6})$.

On note H le milieu du segment $[CD]$ et I le milieu du segment $[BC]$.



1. Calculer les longueurs AB et AD.

On admet pour la suite que toutes les arêtes du solide $ABCD$ ont la même longueur, c'est-à-dire que le tétraèdre $ABCD$ est un tétraèdre régulier.

On appelle $\mathcal{P}$ le plan de vecteur normal $\overrightarrow{OH}$ et passant par le point I.

2. Étude de la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan $\mathcal{P}$

a. Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est : $2y\sqrt{3} + z\sqrt{6} - 9 = 0$.

b. Démontrer que le milieu J de $[BD]$ est le point d'intersection de la droite (BD) et du plan $\mathcal{P}$.

c. Donner une représentation paramétrique de la droite (AD), puis démontrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AD) sont sécants en un point K dont on déterminera les coordonnées.

d. Démontrer que les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.

e. Déterminer précisément la nature de la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan $\mathcal{P}$.

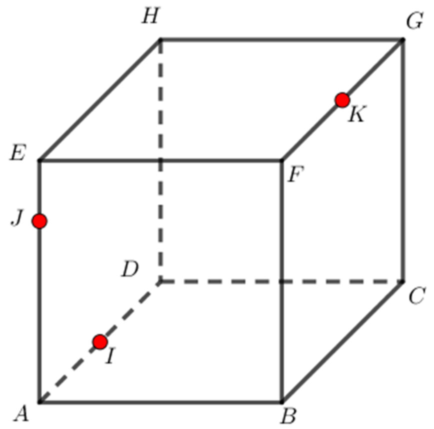
3. Peut-on placer un point M sur l'arête $[BD]$ tel que le triangle OIM soit rectangle en M ?

Corrigé

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_S_Asie_21_juin_2018_2.pdf

Ex 06* Centres Étrangers Juin 2018 durée $\approx 1h20min$**

La figure ci-dessous représente un cube $ABCDEFGH$:



Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

— I est le milieu du segment $[AD]$

— J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$

— K est le milieu du segment $[FG]$.

Partie A

1. Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH).
On laissera les traits de construction sur la figure.

2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).

Partie B

On se place désormais dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.

b. Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\vec{n}(4; a; b)$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est :

$$4x - 6y - 4z + 3 = 0$$

2. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).

b. Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG).

c. Placer le point N sur la figure et construire en couleur la section du cube par le plan (IJK).

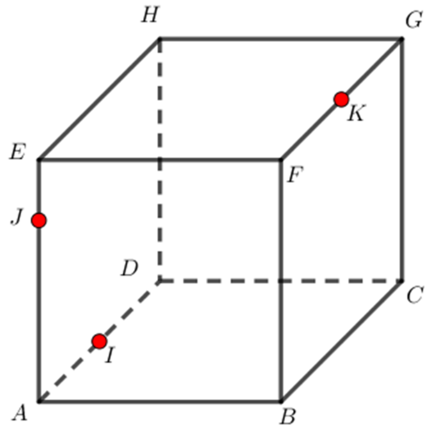
Partie C

On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK). Le point R est donc l'unique point du plan (IJK) tel que la droite (FR) est orthogonale au plan (IJK).
On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $M(x\,;\ y\,;\ z)$ tels que :

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$$

Le point R est-il à l'intérieur du cube ?

ANNEXE



Corrigé

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_S_etranger_11_juin_2018_FH_2.pdf